STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte Stromáci,

Máme tu výsledky po prvej sérii. Je to tak, nesrandujeme! Takže chytro zobrať do rúk úlohy druhej série, ak ste tak ešte nespravili, a jednu po druhej ich eliminovať (samozrejme matematicky). Popritom si už len brúste zuby na prvý poriadny sneh, a nezabúdajte sa počas jazdy na sánkach občas pozrieť aj na cestu, lebo riešenie šestky pri tejto činnosti býva smrtonosné. Tí z vás, ktorí sa toho ale neboja, fotky polámaných saní a usmiatych bezzubých tvarí posielajte na strom@strom.sk! Tešíme sa na vaše riešenia.

vaši **STROM**isti

Riešenia 1. série úloh Zimného semestra 37. ročníka

1. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré sa ciferný súčet čísla 2^n rovná 5.

Opravovali: Paľo Lietadlo Koprda **Počet riešiteľov: 38**

Riešenie:

Začneme tým, že vyskúšame mocniny dvojky pre $n \leq 5$. Sú to čísla 2, 4, 8, 16 a 32. Vidíme, že spomedzi týchto čísel vyhovuje len číslo 32. Teraz sa pozrieme na zvyšné mocniny pre $n > 5$. Keďže $n > 5$, tak všetky tieto mocniny musia byť deliteľné 2, 4, 8, 16 a 32.

Poďme zistiť, aké cifry môžu mať mocniny dvojky s ciferným súčtom 5 na mieste jednotiek. Vieme, že mocniny dvojky majú na mieste jednotiek len párne cifry okrem nuly (ak by mala mocina dvojky na mieste jednotiek 0, tak by bola deliteľná piatimi, a nemohla by byť mocninou dvojky).Takže na mieste jednotiek môžu byť cifry 2, 4, 6 a 8. Lenže ciferný súčet musí byť 5 a to vylučuje cifry 6 a 8. Našli sme teda nutnú podmienku, že na mieste jednotiek musia byť cifry 2 alebo 4.

Pozrime sa teraz na prípad, v ktorom je na mieste jednotiek cifra 4. Vieme, že naša výsledná mocnina musí byť deliteľná štyrmi, čo znamená, že posledné dvojčíslie musí byť deliteľné štyrmi. Keďže na mieste jednotiek je 4, tak cifru na mieste desiatok vieme dopočítať - môžu to byť cifry 0, 2, 4, 6 a 8. Pri cifrách 2, 4, 6 a 8 prekročíme ciferný súčet, takže jediná prípustná cifra je 0. Takže už vieme posledné dvojčíslie, a to 04. Tiež vieme, že výsledná cifra musí byť deliteľná ôsmimi, čo znamená, že posledné trojčíslie musí byť deliteľne ôsmimi. Keďže ciferný súčet nesmie prekročiť päťku, tak na mieste stoviek môžeme použiť len cifry 0 a 1. Vyskúšame obe, a ani jedna nevyhovuje, pretože pre žiadnu z nich nie je číslo deliteľné ôsmimi. To znamená, že na mieste jednotiek nemôže byť ani cifra 4.

Ostáva sa už len pozrieť na posledný prípad - keď je na mieste jednotiek cifra 2. Opäť využijeme deliteľnosť štyrmi a dopočítame cifru na mieste desiatok. Vyhovujú cifry 1, 3, 5, 7 a 9. Cifry 5, 7 a 9 ale prekračujú ciferný súčet, a cifra 3 nám už dala riešenie 32, ktoré má už ciferný súčet 5, a teda nemôžeme k nemu pridávať ďalšie cifry. Ukázali sme teda, že posledné dvojčíslie môže byť (okrem 32) iba 12. Teraz sa opäť pozrieme na deliteľnosť 8. Môžme používať už len cifry 0, 1 a 2, pretože ináč by sme prekročili ciferný súčet. Cifry 0 a 2 nevyhovujú, pretože trojčíslia 012 a 212 nie sú deliteľné ôsmimi. To znamená, že posledné trojčíslie je 112. Pokračujeme deliteľnosťou 16. Tu platí, že posledné štvorčíslie musí byť deliteľné 16. Môžeme použiť už len cifry 0 a 1, kde vyhovuje len cifra 0, pretože číslo 1112 nie je deliteľné 16. Takže posledné štvorčíslie je nutne 0112. Pokračujeme deliteľnosťou 32, pre ktorú platí, že posledné päťčíslie musí byť deliteľné 32. Opäť môžeme použiť len cifry 0 a 1, kde vyhovuje len cifra 1, pretože číslo 00112 nie je deliteľné 32. Takže máme číslo 10112, pred ktoré už nemôžeme pridať nijaké cifry, pretože sme naplnili ciferný súčet 5. Číslo 10112 ale nie je mocnina dvojky. To znamená, že ak je na mieste jednotiek cifra 2, tak jediné vyhovujúce číslo je 32. Našli sme riešenie 32 a ukázali sme, že úloha ďalšie riešenia nemá.

Komentár: Úloha bola pomerne jednoduchá, o čom svedčí aj veľa deväťbodových riešení. Pri riešení úlohy bolo potrebné pozerať sa na deliteľnosť menšími mocninami dvojky. Body som strhával za to, že ste nejaký krok preskočili, alebo ste niečo spravili, ale nevysvetlili ste, prečo to spraviť môžete.

2. Označme S obsah štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že

$$4S \leq (|AB| + |CD|)(|BC| + |DA|) .$$

Pre ktoré štvoruholníky nastáva rovnosť?

Opravovali: Janka Baranová a Dano Till **Počet riešiteľov: 34**

Riešenie:

Túto nerovnosť si prepíšeme a roznásobíme:

$$4S \leq (a+c)(b+d)$$

$$4S \leq ab + ad + cb + cd.$$

Toto je to, čo chceme dokázať. Pozrime sa teraz na náš štvoruholník. Keďže nie je v zadaní povedané ináč, musíme uvažovať všeobecný (rôzne dlhé strany, rôzne veľké uhly, nič špeciálne). Máme dve možnosti – môže ísť buď o konvexný alebo nekonvexný štvoruholník.

Najprv rozoberieme konvexný štvoruholník. Keď ho rozdelíme uhlopriečkou AC, tak dostaneme dva trojuholníky, teda obsah štvoruholníka S vieme vypočítať ako súčet obsahov trojuholníkov ABC a ACD, t.j. platí

$$S = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin\beta + 1/2 \cdot c \cdot d \cdot \sin\delta.$$

Analogicky, keď štvoruholník rozdelíme uhlopriečkou BD, tak platí

$$S = 1/2 \cdot b \cdot c \cdot \sin\gamma + 1/2 \cdot d \cdot a \cdot \sin\alpha.$$

Aby sme sa v rovniciach zbavili zlomkov, tak obe vynásobíme dvomi, a dostávame

$$2S = a \cdot b \cdot \sin\beta + c \cdot d \cdot \sin\delta$$

$$2S = b \cdot c \cdot \sin\gamma + d \cdot a \cdot \sin\alpha.$$

Môžeme si všimnúť, že v nerovnosti, ktorú chceme dokázať, máme veľmi podobné členy ako keď sčítame tieto dve nerovnosti, tak to spravme.

$$4S = a \cdot b \cdot \sin\beta + c \cdot d \cdot \sin\delta + b \cdot c \cdot \sin\gamma + d \cdot a \cdot \sin\alpha$$

Toto je rovnosť, ktorá platí pre každý konvexný štvoruholník. Keď si ju porovnáme s našou upravenou nerovnosťou, ktoú chceme dokázať, tak vidíme, že sa líšia len v prítomnosti nejakých sínusov na pravej

strane. Keďže sínus nadobúda hodnoty v intervale $< -1, 1 >$, tak pravá strana rovnice je menšia (alebo rovná) pravej strane nerovnosti. Rovnosť nastáva iba v prípade, keď $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \sin\delta = 1$. Všetky tieto sínusy sa rovnajú 1 iba v prípade, keď uhol pri každom vrchole je pravý, teda keď je daný štvoruholník obdĺžnikom. Týmto sme zistili, kedy nastáva rovnosť, a dokázali, že nerovnosť platí pre konvexné štvoruholníky.
Teraz rozoberieme nekonvexný štvoruholník. Bez ujmy na všeobecnosti, nech C je vrchol, pri ktorom je uhol väčší ako 180° (viac takých vrcholov byť nemôže). Zvolíme bod C' ako obraz bodu C v osovej súmernosti podľa BD. Tým sme dosiahli to, že štvoruholník $ABC'D$ je konvexný, má rovnako dlhé strany, a zároveň väčší obsah ako štvoruholník $ABCD$. Keďže sme danú nerovnosť už dokázali pre konvexný štvoruholník, tak daná nerovnosť platí pre štvoruholník $ABC'D$. A keďže $ABC'D$ má väčší obsah ako $ABCD$, tak nerovnosť bude platiť aj pre nekonvexný štvoruholník $ABCD$. Rovnosť pochopiteľne nastať nemôže. Týmto sme úlohu vyriešili aj pre druhý prípad štvoruholníka.

Komentár: Táto úloha nebola pre väčšinu z vás ťažká a bez problémov ste ju vyriešili. Avšak mnohým sme strhli bod za to, že ste ani len neuvažovali nekonvexný štvoruholník, alebo že ste nespomenuli, kedy nastane rovnosť, čo je škoda. Menej bodov získali tí, ktorí nerovnosť dokázali len pri pár špeciálnych štvoruholníkoch. Nabudúce úlohu riešte rovno všeobecne, a nepíšte zbytočne konkrétne prípady (ak potom spomeniete aj tak všetko ešte raz a všeobecne) – za nás biológov, šetrite lesy ;).

3. Máte 14 mincí, pričom 7 z nich je pravých a 7 falošných. Neviete, ktoré sú ktoré. Všetky falošné mince vážia rovnako a všetky pravé mince vážia rovnako. Vieme, že falošné mince sú ľahšie ako pravé, no jediný, kto vie tento nepatrný rozdiel rozpoznať, je robot Karol. Ak dáte Karolovi do každej z jeho dvoch rúk ľubovoľný počet mincí a potom ho kopnete, Karol ich odváži a

- ak sú hmotnosti mincí v jeho rukách rovnaké, tak Karol povie, že sú rovnaké a mince si môžete zobrať;
- ak sú hmotnosti rôzne, Karol vám povie, v ktorej ruke je hmotnosť väčšia, dá si náhodnú mincu z „ťažšej“ ruky do vrecka a zvyšné mince si môžete zobrať.

Vaším cieľom je získať aspoň jednu pravú mincu. Popíšte postup, ako zaručene pravú mincu získať, alebo dokážte, že takýto zaručený postup neexistuje. *Mince si nemôžete označiť a ak skončia v Karolovom vrecku sú nenávratne preč.*

Opravovali: Peter Milošovič a Mirka Vašková **Počet riešiteľov: 23**

Riešenie:

Skúsme sa najprv s Karolom pohrať. Ak by sme mu dali len dve mince, do každej ruky jednu, Karol by nám buď obe vrátil, alebo si nechal ťažšiu z nich, teda pravú.
Dajme Karolovi do oboch rúk po sedem mincí. Jedna sedmica bude určite ťažšia, pretože ak by sa rovnali, znamenalo by to, že je v oboch rovnaký počet pravých aj falošných, a teda spolu vo všetkých 14 minciach by nemohlo byť spolu 7 pravých a 7 falošných. Aby bola sedmica ťažšia, musia tam byť aspoň štyri pravé mince. Z ťažšej ruky nám Karol stále náhodnú mincu zoberie, takže nám ostalo šesť mincí, z ktorých aspoň tri sú pravé (náhodná totiž mohla byť pravá). Zabudnime na ľahšiu sedmicu a zaoberajme sa už len týmito šiestimi mincami. Zoberme si ľubovoľné dve z týchto šiestich mincí. Môžu nastať dva prípady:

1. Ak nám ich Karol vráti, odložíme ich nabok a vezmeme iné dve. Ak nám aj tie Karol vráti, odložíme ich nabok (na inú kopu ako tie predtým) a vezmeme posledné dve, inak postupujeme ďalej ako v možnosti **2.** Ak sa rovnajú aj posledné dve, dáme ich na tretiu kopu (inak postupujeme ako v možnosti **2.**) a ďalej porovnáme mince z rôznych kôpok a pokračujeme rovnako. Ak nám Karol nevráti obe, tak pokračujeme ako v **2.** Porovnáme najprv jednu mincu z jednej kôpky s mincou z inej kôpky, a ak sa rovnajú, tak vieme, že máme 4 mince s rovnakou hmot-

nosťou – keďže medzi našimi šiestimi mincami mohli byť najviac tri falošné, každá z týchto štyroch rovnakých je pravá.

2. Ak nám z prvej porovnanej dvojice jednu vezme, vieme, že nám ostali ešte 4 mince, z ktorých aspoň dve sú pravé. Dajme Karolovi do každej z rúk po dve. Ak sa rovnajú, tak sú buď všetky štyri pravé, alebo je na každej z rúk jedna pravá a jedna falošná. Vezmime ich preč z rúk a uložme si ich niekam bokom na dve kôpky. Vezmime z každej kôpky jednu. Ak sa nerovnajú, Karol nám zobral pravú, a znamená to, že na rukách bolo predtým po jednej falošnej, a po jednej pravej minci. Teda na kôpke, z ktorej sme zobrali falošnú mincu, nám ostala pravá. Ak sa rovnajú, tak ich dajme na jednu ruku, a na druhú dajme tie posledné dve mince. Ak opäť nastane rovnosť, všetky štyri musia byť pravé. Ak sa nerovnajú, tak zároveň riešime aj situáciu zo začiatku možnosti **2.**, keď sme dali Karolovi do rúk po dvoch minciach, a nenastala rovnováha. Potom mohli byť na ťažšej ruke jediné dve pravé mince. Zo všetkých štyroch sú aspoň dve pravé, a ak by na ťažšej ruke bola iba jedna, z týchto štyroch mincí by museli byť tri falošné. Nech si teda Karol jednu vezme a nám ostane pravá.

Komentár: Je dôležité poukázať na to, že vieme vymeniť mince tak, aby nám ich Karol stále nevracal s tým, že sú rovnaké. Ak mu ich dávame do rúk náhodne (niektoré dve z našich štrnástich), tak sa môže stať, že mu dookola budeme stále dávať dve s rovnakou hmotnosťou. Práve kvôli tomu ste stratili mnohí dôležité body, ktoré budú rozhodovať o tom, kto pôjde a kto nepôjde na týždeň plný zábavy. Inak dúfame, že vás z toľkého kopania do chudáka robota nebolia nohy, a prajeme veľa šťastia nabudúce.

4. V rovine je daných 50 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Každý z týchto bodov má jednu zo štyroch daných farieb. Dokážte, že vieme zvoliť jednu z týchto štyroch farieb tak, že sa dá nájsť aspoň 130 nerovnoramenných trojuholníkov, ktorých všetky vrcholy majú zvolenú farbu.

Opravovali: Matúš Stehlík **Počet riešiteľov: 20**

Riešenie:

Z našich 4 farieb určite vieme vybrať takú, ktorou je zafarbených aspoň 13 bodov. Ak by z každej farby bolo najviac 12 bodov, tak dokopy ich je najviac 48, čo je menej ako 50. Ďalej sa budeme zaoberať už len bodmi tejto farby. Vyberme si z nich ľubovoľných 13 – to vieme, lebo je ich tam aspoň 13. Teraz ukážeme, že týchto 13 bodov tvorí aspoň 130 nerovnoramenných trojuholníkov.

- Žiadne 3 body neležia na priamke, takže každé tri body tvoria trojuholník. Počet všetkých trojuholníkov, ktoré vieme vytvoriť z 13 bodov, je rovnaký ako počet všetkých trojíc z týchto bodov. To je
$$\binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286.$$
Prvý bod vyberáme z 13, druhý z 12, tretí z 11, lenže každú trojicu sme mohli vybrať $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ spôsobmi, takže sme každý trojuholník započítali šesťkrát.

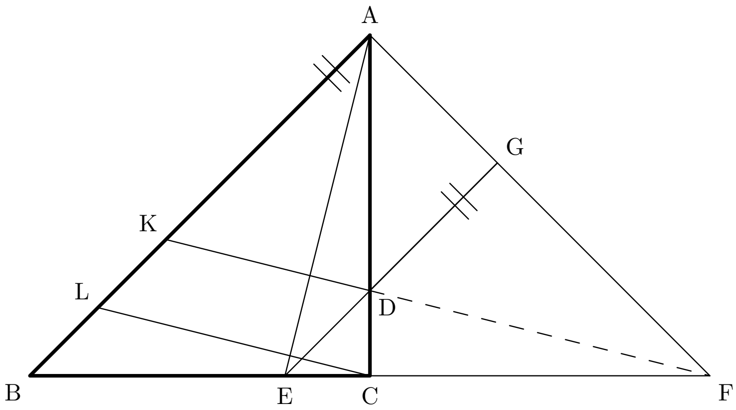
- Ak je tam nejaký rovnoramenný trojuholník, tak má nejakú základňu. S tou istou základňou tam môžu byť najviac 2 rovnoramenné trojuholníky, lebo vrchol oproti základni leží na osi základne. Ale žiadne tri body neležia na priamke, takže na osi každej úsečky sú najviac dva body. Takto môžeme zhora odhadnúť počet rovnoramenných trojuholníkov. Za každú úsečku, ktorej konce tvoria nejaké z týchto 13 bodov, započítame 2 rovnoramenné trojuholníky. Určite ich tam nie je viac, lebo by potom nejaké tri body ležali na priamke. To, či sa dá takýto počet rovnoramenných trojuholníkov dosiahnuť, nás zaujímať nemusí, robíme len odhad. Takže ich bude najviac
$$\binom{13}{2} \cdot 2 = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} \cdot 2 = 156.$$

Zo všetkých 286 trojuholníkov je najviac 156 rovnoramenných. Zvyšných aspoň 130 trojuholníkov je určite nerovnoramenných.

Komentár: Väčšina z vás úlohu hravo zvládla. Úvaha, ktorú sme použili na začiatku (aspoň jedna farba má aspoň 13 bodov), sa nazýva aj Dirichletov princíp. Tu bolo kľúčové uvedomiť si, že to naozaj záleží len od tej jednej *početnej* farby. Inak by sme body každej farby mohli rozostaviť tak, aby tam nebolo 130 nerovnoramenných trojuholníkov. Zvyšok už bol len dosť hrubý odhad, ktorý nám našťastie stačil.

5. Daný je rovnoramenný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Na stranách CA a CB sú postupne dané body D a E tak, že $|CD| = |CE|$. Kolmice z bodov D a C na priamku AE pretínajú priamku AB postupne v bodoch K a L. Dokážte, že bod L je stredom úsečky KB.

Opravovali: Robčo Tóth a Ivka Gašková **Počet riešiteľov: 26**
Riešenie:



Všimnime si, že ak vytvoríme nový bod F ako priesečník BC a KD, dokázať tvrdenie zo zadania bude znamenať dokázať rovnoramennosť trojuholníka BFA (vďaka $|BC| = |CF|$ by potom postačovala podobnosť trojuholníkov BLC a BKF). Môžete si skúsiť vyriešiť úlohu týmto spôsobom, my sme sa rozhodli urobiť to naopak, t.j. predpokladať rovnoramennosť BFA a ukázať, že D leží na KF. Takže začnime pekne po poriadku. Prikreslime si k trojuholníku ABC ešte jeden taký, ktorý je osovo súmerný s trojuholníkom ABC podľa osi AC. Označme bod F ako ten, ktorý sa v tejto súmernosti zobrazí na bod B, a bod G ako prienik ED a AF (tak ako na obrázku). Vieme, že trojuholník ABC je rovnoramenný, t.j. $|AC| = |BC|$ a vieme aj, že $|EC| = |DC|$, preto $AB \parallel ED$, teda $AB \parallel EG$. Trojuholník ABC je rovnoramenný pravouhlý, potom $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CAF| = 45°$, teda $|\sphericalangle BAF| = 90°$, čiže $|\sphericalangle EGF| = 90°$. EG a AC sú výšky trojuholníka AEF, pretínajú sa teda v jeho ortocentre, čiže v bode D. Z toho vieme, že kolmica z bodu D na AE prechádza bodom F (pretože to taktiež bude výška v tomto trojuholníku). Priamka LC je preto rovnobežná s KF (obidve priamky sú kolmé na AE), a trojuholník BLC je podobný s trojuholníkom BKF v pomere $1:2$, pretože $LC \parallel KF$, majú spoločný vrchol B a $|BC| : |BF| = 1 : 2$, preto $|BL| : |BK| = 1 : 2$, čiže L je stredom úsečky KB. A to je to, čo sme chceli ukázať.

Komentár: Úlohu ste riešili mnohými spôsobmi, či už dokreslením si takéhoto trojuholníka, či trojuholníka zhodného s trojuholníkom AEC, správnych postupov bolo naozaj veľa, a mnohým z vás sa to podarilo aj úspešne dokázať, či už kratšou, alebo dlhšou cestou. Tu vám na inšpiráciu ponúkame jedno z kratších riešení podľa Katky Krajčiovej, aby ste si nabudúce zbytočne nemíňali atrament v perách :) Hlavne si dávajte pozor na to, aby ste si do obrázka neprikreslili veci až príliš ideálne – najčastejšou chybou je viesť priamku cez tri body a neodôvodniť, prečo by tieto tri mali na nej ležať.

6. Rozhodnite, či existuje prvočíslo p také, že $7p + 3^p - 4$ je druhou mocninou celého čísla.

Opravovali: Matúš Stehlík a Viktor Lukáček **Počet riešiteľov: 10**
Riešenie:
Začneme tým, že si povieme, čo znamená výraz kongruencia. Budeme hovoriť, že celé čísla a a b sú

kongruentné modulo p a zapisovať to $a \equiv b \pmod p$, ak platí, že a dáva rovnaký zvyšok po delení p, ako b. Viac o týchto výhodných zápisoch, a o práci s nimi sa môžete dočítať napríklad v zbierke KMS. Pre $p = 2$ dosadením ľahko zistíme, že výraz nie je druhou mocninou celého čísla. Pre p nepárne najprv rozoberieme prípad, že p je tvaru $p = 4k + 1$ a vyskúšame zvyšok po delení štyrmi.

$$7p + 3^p - 4 \equiv 7(4k + 1) + (-1)^{4k+1} \equiv 7 - 1 \equiv 2 \pmod 4$$

Takže tento výraz je deliteľný dvomi, ale štyrmi už nie, čiže to nemôže byť druhá mocnina celého čísla (ak $2|\ n^2$, tak $2|\ n$ a potom $4|\ n^2$). Teraz rozoberieme ten ťažší prípad, čiže keď je p tvaru $p = 4k + 3$. Pozrieme sa na zvyšok po delení p a využijeme malú Fermatovu vetu (tá vraví, že pre každé prvočíslo p a ľubovoľné celé číslo a platí $a^p \equiv a \pmod p$, teda že a^p dáva po delení p rovnaký zvyšok ako a).

$$7p + 3^p - 4 \equiv 3 - 4 \equiv -1 \pmod p$$

Je známe, že ak druhá mocnina celého čísla dáva po delení p zvyšok -1, tak prvočíslo nemôže byť tvaru $p = 4k + 3$, ale náš predpoklad bol, že je. Čiže výraz v zadaní nemôže byť druhá mocnina celého čísla ani pre p tvaru $p = 4k + 3$.
Dokázať, že druhá mocnina celého čísla nemôže dávať zvyšok -1 po delení prvočíslom tvaru $4k + 3$ môžeme napríklad nasledovne. Budeme uvažovať sporom: Nech p je tvaru $4k+3$ a nech existuje také a, že $a^2 \equiv -1 \pmod p$. Z toho je jasné, že $p \nmid a$, potom však s využitím malej Fermatovej vety musí platiť

$$1 \equiv a^{p-1} \equiv a^{4k+3-1} \equiv (a^2)^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod p.$$

Čo môže platiť len pre $p = 2$, ale to je spor s tým, že p je tvaru $p = 4k + 3$. Celkovo dostávame, že výraz $7p + 3^p - 4$ nemôže byť druhá mocnina celého čísla pre žiadne prvočíslo p.

Komentár: Všetci, ktorí úspešne vyriešili túto úlohu, využili malú Fermatovu vetu (ktorá sa vyskytuje v dvoch veľmi podobných formách) a riešili to podobne ako v tomto vzorovom riešení. Pre tých, ktorí nepoznajú malú Fermatovu vetu alebo nevedia, čo znamenajú kongruencie, (to sú zápisy tvaru $a \equiv b \pmod p$) odporúčame si to naštudovať, napríklad v zbierke úloh KMS 4. kapitola. V teórii čísel majú tieto poznatky rozsiahle uplatnenie.

Poradie po 1. sérii Zimého semestra 37. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Jakub Šafin	4. G	GMasaMI	9	9	9	9	9	9	0	54
2.	Martin Vodička	Oktáva	GAlejKE	9	8	9	9	9	9	0	53
3.	Marko Puza	3. A	GPoštKE	9	8	8	9	9	9	0	52
4.	Miroslav Stankovič	3. A	GPoštKE	9	7	8	9	9	9	0	51
5.	Žaneta Semanišinová	Kvinta A	GAlejKE	9	9	7	9	-	-	0	43
5.	Matúš Hlaváčik	Oktáva	GAlejKE	9	8	8	9	9	-	0	43
7.	Henrieta Micheľová	Kvinta A	GAlejKE	9	7	6	9	2	1	0	42
8.	Richard Trembecký	Oktáva	GAlejKE	9	9	-	-	9	9	0	36
9.	Michal Korbela	Septima	GRadBN	9	7	8	9	1	-	0	34
10.	Kristína Mišlanová	Kvinta A	GAlejKE	9	8	7	-	-	-	0	33
10.	Daniel Onduš	Kvinta A	GAlejKE	9	7	0	8	-	-	0	33
10.	Ľudmila Šimková	Septima	GPároNR	6	9	-	9	9	-	0	33
13.	Filip Hanzely	Oktáva	GKomeSB	-	7	7	-	9	9	0	32
14.	Lucia Magurová	4. A	GPoštKE	9	8	-	4	9	-	0	30
15.	Filip Unoka	4. A	GPoštKE	9	6	8	-	4	-	0	27

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
15.	Vladislav Vancák	Septima B	GAlejKE	9	9	1	-	8	-	0	27
17.	Jozef Lukáč	3. C	GJiráBJ	9	4	2	2	9	-	0	26
17.	Alexander Ténai	2. A	GPoštKE	8	9	-	-	-	9	0	26
17.	Roman Staňo	2. A	GPoštKE	9	8	6	-	-	3	0	26
17.	Jakub Dargaj	3. A	GPoštKE	9	8	-	9	-	-	0	26
21.	Martin Rapavý	Septima A	GAlejKE	8	8	-	-	9	-	0	25
22.	Peter Kovács	Sexta	GAlejKE	-	8	7	-	9	-	0	24
23.	František Lami	4. A	GPoštKE	9	7	-	-	7	-	0	23
23.	Florián Hatala	2. A	GPoštKE	9	-	-	9	5	-	0	23
25.	Zoltán Hanesz	9	ZKuzmKE	8	3	-	3	-	-	0	22
25.	Alica Kačengová	4. B	GJavoSN	9	2	4	2	5	-	0	22
27.	Patrik Lenárt	1. C	GParkKE	6	3	4	1	-	-	0	20
28.	Róbert Schönfeld	2. A	GPoštKE	9	-	9	-	-	-	0	18
28.	Lucia Leličová	2. A	GPoštKE	9	9	-	-	-	-	0	18
28.	Katarína Súčiková	1. A	GNovoBA	9	-	-	-	-	-	0	18
28.	Václav Krchňák	1. A	GJaroCZ	9	0	-	-	-	-	0	18
32.	Katarína Krajčiová	Sexta	GAlejKE	-	-	8	-	9	-	0	17
32.	Marek Fedák	2. B	GŠtúrSL	9	1	2	-	5	-	0	17
34.	Jana Kižiková	4. A	GPoštKE	9	7	-	-	-	-	0	16
35.	Vladimír Sabo	Septima B	GAlejKE	8	3	0	2	2	0	0	15
35.	Dorota Jarošová	Sexta	GAlejKE	9	5	-	-	1	-	0	15
37.	Vladimír Macko	4. A	GHronZV	-	7	6	-	-	-	0	13
38.	Tomáš Daneshjo	2. A	GPoštKE	-	-	-	9	-	-	0	9
38.	Anton Gromóczki	2. A	GPoštKE	9	-	-	-	-	-	0	9
40.	Martin Paľko	Septima B	GAlejKE	6	-	-	-	2	-	0	8
40.	Alexandra Repíková	Kvinta A	GAlejKE	3	-	-	2	0	-	0	8
42.	Dávid Barbora	Sexta	GBernNB	5	-	-	-	-	-	0	5
43.	Tereza Volavková	1. A	GPoštKE	1	-	-	-	-	-	0	2
44.	Dávid Chovanec	Sexta	GAlejKE	-	-	-	-	2	-	0	2
45.	Ján Dudič	4. A	GPoštKE	-	1	-	-	-	-	0	1

Pohár konštruktérov Zimého semestra 37. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	16	424
2.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	16	357
3.	GMasaMI	Gymnázium Pavla Horova Masarykova 1 071 79 Michalovce	1	54
4.	GRadBN	Gymnázium Radlinského 12 957 01 Bánovce nad Bebravou	1	34
5.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	33
6.	GKomeSB	Gymnázium Komenského 40 083 01 Sabinov	1	32
7.	GJiráBJ	Gymnázium Jiráskova 12 085 70 Bardejov	1	26
8.	ZKuzmKE	Základná škola s v.j.m. Kuzmányho 6 041 74 Košice	1	22
8.	GJavoSN	Gymnázium Javorová 16 052 01 Spišská Nová Ves	1	22
10.	GParkKE	Gymnázium Park mládeže 5 040 01 Košice	1	20
11.	GNovoBA	Gymnázium J. Hronca Novohradská 1 821 09 Bratislava 2	1	18
11.	GJaroCZ	Gymnázium tř. Kpt. Jaroše 14 658 70 Brno	1	18
13.	GŠtúrSL	Cirkevné gym. sv. Mikuláša Štúrova 3 064 01 Stará Ľubovňa	1	17
14.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	13
15.	GBernNB	Gymnázium Bernolákova 9 968 01 Nová Baňa	1	5

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2012 • Zimný semester 37. ročníka (2012/2013)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`